А. Г. Хованский, Многогранники Ньютона и неприводимые компоненты полных пересечений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2016, том 80, выпуск 1, 281–304

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/im8307

УДК 515.165.4

А. Г. Хованский

Многогранники Ньютона и неприводимые компоненты полных пересечений

Вычислено число неприводимых компонент многообразия, заданного в $(\mathbb{C}^*)^n$ общей системой уравнений с заданными многогранниками Ньютона. Каждая такая компонента, в свою очередь, может быть задана общей системой уравнений, многогранники Ньютона которой находятся явно. Известно, что многие дискретные инварианты многообразия находятся по многогранникам Ньютона. Результаты статьи позволяют вычислить такие инварианты для каждой неприводимой компоненты многообразия.

Библиография: 7 наименований.

Ключевые слова: многогранники Ньютона, смешанный объем, неприводимые компоненты, голоморфные формы.

DOI: 10.4213/im8307

Памяти Андрея Андреевича Болибруха

§ 1. Введение

1.1. Предыстория. Андрей Андреевич Болибрух был не только глубоким математиком, известным всему математическому сообществу решением 21-й проблемы Гильберта. Он был легок в общении, отлично разбирался в людях, многим охотно помогал, был доброжелательным и необычайно добросовестным человеком.

Андрей сыграл значительную роль и в моей жизни. Расскажу об этом подробнее. В начале 1970-х годов, будучи учеником Владимира Игоревича Арнольда, я построил своеобразный топологический вариант теории Галуа, который стал основой моей кандидатской. Мне предложили опубликовать теорию в журнале "Известия АН СССР". В то время я не знал ни обычной, ни дифференциальной теории Галуа и совершенно не разбирался в запутанной истории вопроса. Поэтому, прежде чем браться за статью, я решил подучиться. Но жизнь есть жизнь. Вскоре у меня начали получаться новые результаты по теории многогранников Ньютона, затем появилась моя теория малочленов. Я был целиком поглощен всем этим и стал забывать топологическую теорию Галуа. Связанные с ней планы отодвинулись на неопределенный срок.

Андрей стал соредактором нового журнала "Journal of Dynamical and Control Systems", первый номер которого должен был выйти в январе 1995 г. В феврале 1994 г. (через 21 год после защиты моей кандидатской) Андрей недолго гостил

Работа выполнена при поддержке грантов ANR-08-BLAN-0317-01 и ANR-13-IS01-0001-01 Национального агенства научных исследований.

у нас в Торонто. В это время он думал о журнале и в связи с этим вспомнил о моей теории. Андрей убедил меня отделить вопрос об ее связях с известной математикой и сосредоточиться на приведении текста в порядок. Казалось, что идея Андрея поместить статью в первом номере абсолютно нереалистична. Мы были в Канаде, а текст лежал в нашей московской квартире. Надо было как-то его достать, отредактировать, перевести на английский и подготовить к публикации. Приехав в Москву, Андрей раздобыл текст, сделал ксерокопию и переправил ее нам. Он заразил меня своей активностью. Я восстановил все детали и отредактировал текст, наш старый друг Смилка Здравковска перевела его на английский, и статья действительно вышла в первом номере. [1]

В результате я вернулся к топологической теории Галуа. В кандидатской она была построена только для функций одной переменной. Мне удалось построить ее многомерный вариант, разобраться в связях с алгебраической и дифференциальной теориями Галуа и в истории вопроса. В 2008 г. вышла книга, посвященная этой теме. [2] Недавно вышла ее значительно расширенная английская версия. [3]

Если бы не вмешательство Андрея, скорее всего, ничего этого бы не случилось, моя работа так бы и осталась неопубликованной и постепенно полностью забылась бы.

В связи с этой историей мне хотелось посвятить А. А. Болибруху один из моих старых результатов, которым я горжусь, но так и не опубликовал. Пожалуй, самый старый из них – аффинный вариант теоремы Бернштейна–Кушниренко, вычисляющий число и кратности изолированных корней в $\mathbb{C}^n$ общей системы из n полиномиальных уравнений с заданными многогранниками Ньютона (исходная теорема вычисляет число корней такой системы в $(\mathbb{C}^*)^n$). Этой теме был посвящен ряд исследований, но окончательный результат в них так и не был найден. При подготовке аффинного варианта к публикации я нашел его обобщение, вычисляющее число и кратности $(n-k)$-мерных компонент многообразия, определенного в $\mathbb{C}^n$ общей системой из k полиномиальных уравнений с заданными многогранниками Ньютона. Для этого обобщения прежде всего требовалось найти число неприводимых компонент подобного многообразия в $(\mathbb{C}^*)^n$. Когда подробное вычисление этого числа было записано, стало ясно, что здесь естественно остановиться.

1.2. Содержание статьи. В настоящей статье вычислено число неприводимых компонент многообразия, заданного в $(\mathbb{C}^*)^n$ общей системой k уравнений с заданными многогранниками Ньютона. При $k=n$ полученный результат совпадает с теоремой Бернштейна–Кушниренко. При $k<n$ его доказательство обобщает вариант доказательства этой теоремы, найденный в статье [1]. В следующей публикации будет рассмотрена более сложная аффинная версия этой задачи.

---

[1] A. G. Khovanskii, "Topological obstructions for representability of functions by quadratures", *J. Dyn. Control Syst.*, **1**:1 (1995), 91–123.

[2] А. Г. Хованский, *Топологическая теория Галуа*, МЦНМО, М., 2008, 295 с.

[3] A. Khovanskii, *Topological Galois theory. Solvability and unsolvability of equations in finite terms*, Springer Monographs in Math., Berlin, Springer, 2014, 307 pp.

Пусть $(\mathbb{C}^*)^n$ – комплексный тор с фиксированными координатами $z_1, \dots, z_n$ и $\mathbb{R}^n$ – вещественное *пространство характеров* с координатами $x_1, \dots, x_n$. Каждой целой точке $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ соответствует характер тора (моном) – функция $z^k = z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$.

Полиномом Лорана называется конечная линейная комбинация характеров $P = \sum c_k z^k$. *Носителем* $\operatorname{supp}(P)$ полинома Лорана P называется конечное множество $\operatorname{supp}(P) \subset \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$, определенное условием $k \in \operatorname{supp}(P) \iff c_k \neq 0$. *Многогранником Ньютона* $\Delta(P) \subset \mathbb{R}^n$ полинома Лорана P называется выпуклая оболочка его носителя $\operatorname{supp}(P)$.

В этой статье мы будем иметь дело с алгебраическим многообразием X, определенным в $(\mathbb{C}^*)^n$ системой уравнений

$$P_1 = \dots = P_k = 0, \tag{1}$$

где $P_1, \dots, P_k$ – достаточно общий набор полиномов Лорана с заданными носителями $A_1, \dots, A_k \subset \mathbb{Z}^n$ и с многогранниками Ньютона $\Delta_1, \dots, \Delta_k \subset \mathbb{R}^n$. Такое алгебраическое многообразие – основной объект изучения в теории многогранников Ньютона. Хорошо известно (см. [1], [2]), что X является неособым многообразием и что дискретные инварианты многообразия X зависят лишь от набора многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ (и не зависят ни от выбора наборов носителей $A_1, \dots, A_n$, выпуклые оболочки которых равны $\Delta_1, \dots, \Delta_k$, ни от выбора достаточно общей системы полиномов Лорана с данными носителями). Ниже, говоря об общей системе уравнений (1), мы будем иногда опускать упоминание о множестве носителей $A_1, \dots, A_k$ и указывать лишь многогранники Ньютона $\Delta_1, \dots, \Delta_k$. При этом мы всегда имеем в виду некоторый набор носителей и не упоминаем его явно, только чтобы не загромождать текст легко восстанавливаемыми подробностями.

Часто при рассмотрении системы (1) предполагают, что все многогранники Δ_i имеют полную размерность n. Мы не делаем такого предположения. Для нас важную роль играет понятие *дефекта* подмножества индексов $J = \{1, \dots, k\}$ для набора выпуклых тел $\Delta_1, \dots, \Delta_k$. Для каждого непустого J определим тело $\Delta_J = \sum_{i \in J} \Delta_i$ (сумма тел понимается *в смысле Минковского*, см. п. 2.1). Через $|J|$ мы будем обозначать число элементов в множестве J. Для $J = \varnothing$ положим $\Delta_J = \{0\}$ и $|J| = 0$.

Определение. *Дефектом* множества $J \subset \{1, \dots, k\}$ для набора $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ назовем число $\dim \Delta_J - |J|$. В частности, дефект пустого подмножества равен нулю. Набор тел называется *независимым*, если дефект всякого множества J для этого набора неотрицателен.

Вот некоторые результаты, связанные с понятием дефекта.

Теорема Минковского. *Смешанный объем набора тел $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ равен нулю, если и только если набор тел зависим.*

Понятие смешанного объема (см. п. 2.1) и теорема Минковского важны для настоящей статьи. Подробное доказательство этой теоремы приведено в п. 2.2. Из теоремы Минковского и из теоремы Бернштейна–Кушниренко (см. § 3) вытекает, что *достаточно общая система* (1) *несовместна, если и только если многогранники $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ зависимы* (см. § 3, теорема 11).

По теореме о редукции (п. 5.1, теорема 15), если общая система (1) совместна, но для нее *существует подмножество индексов* J, *имеющее нулевой дефект, то систему можно свести к некоторому числу общих систем уравнений от меньшего числа переменных* (при этом число таких систем определяется по набору многогранников Ньютона и множеству J). По теореме о неприводимости (п. 5.2, теорема 17) *если такая редукция невозможна, то многообразие, определенное системой и* (1), *неприводимо.*

Теоремы о редукции и неприводимости позволяют найти число неприводимых компонент многообразия X и вычислить их дискретные инварианты. Вычисления дискретных инвариантов, как и вообще большая часть результатов теории многогранников Ньютона, основаны на связи этой теории с геометрией торических многообразий, открытой в [1], [2]. Имеется, однако, ряд элементарных результатов, для которых эта техника не требуется. В статье сначала мы помещаем именно такие результаты. Один из них – теорема о гладкости многообразия X, которую мы дополняем утверждением о трансверсальности X заданному подмногообразию (см. п. 1.3).

Пусть $h^p(M)$ – размерность пространства голоморфных p-форм на гладком компактном комплексном алгебраическом многообразии M. Это число является бирациональным инвариантом многообразия M. Поэтому для любого (некомпактного и негладкого) алгебраического многообразия Y можно положить $h^p(Y)$ равным числу $h^p(M)$ любого гладкого и компактного многообразия M, бирационально эквивалентного Y. Альтернированная сумма $\chi(Y) = \sum(-1)^p h^p(Y)$ чисел $h^p(Y)$ называется *арифметическим родом* алгебраического многообразия Y.

Известна явная формула для арифметического рода $\chi(X)$ многообразия X, определенного достаточно общей системой (1) (см. теорему 29 и следующее за ней замечание в § 8). Мы дополняем эту формулу следующими результатами.

1) Если число $j > 0$ *не равно дефекту* никакого непустого подмножества индексов J для независимого набора многогранников Ньютона системы (1), *то число* $h^j(X)$ *равно нулю* (§ 8, теорема 31).

2) *Если же* j *равно дефекту* некоторого непустого подмножества индексов J, *то при выполнении ряда дополнительных условий число* $h^j(X)$ *положительно* (теорема 20, п. 5.2).

Утверждение о положительности чисел $h^j(X)$ основано на явном построении голоморфных j-форм на замыкании многообразия X в подходящей торической компактификации. Оно не использует когомологических вычислений и вполне элементарно. Когомологии торических многообразий с коэффициентами в пучках сечений одномерных инвариантных голоморфных расслоений впервые применялись в теории многогранников Ньютона в [1], [2]. Результаты настоящей статьи вполне могли бы появиться в этих работах (позже, начиная с работы [3], появились значительно более тонкие вычисления, использующие теорию смешанных структур Ходжа).

Прежде чем переходить к изложению материала статьи, покажем, что многообразие $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$, определенное достаточно общей системой уравнений (1), гладко и трансверсально любому фиксированному полуалгебраическому множеству $Y \subset (\mathbb{C}^*)^n$.

1.3. Гладкость и трансверсальность. Пусть $Y \subset (\mathbb{C}^*)^n$ – полуалгебраическое множество, и пусть Y стратифицировано, т. е. представлено в виде конечного объединения $Y = \bigcup Y_i$ непересекающихся гладких (вообще говоря, незамкнутых) полуалгебраических многообразий Y_i.

Теорема 1. *Для почти всех наборов коэффициентов, фигурирующих в системе* (1), *многообразие $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$, определенное этой системой, неособо и трансверсально всем стратам Y_i полуалгебраического множества Y.*

Доказательство. Занумеруем произвольным образом мономы в носителе каждого из полиномов Лорана $P_i = \sum c_{i,j} x^{m_{i,j}}$, выделим первый моном $x^{m_{i,1}}$ и представим P_i в виде $P_i = c_{i,1}x^{m_{i,1}} + \widetilde{P}_i$, где $\widetilde{P}_i = \sum_{j>1} c_{i,j}x^{m_{i,j}}$. Систему (1) можно переписать в виде $-c_{1,1} = \widetilde{P}_1 \cdot x^{-m_{1,1}}, \dots, -c_{k,1} = \widetilde{P}_k \cdot x^{-m_{k,1}}$. Другими словами, многообразие X можно определить как прообраз точки $c = (-c_{1,1}, \dots, -c_{1,k}) \in \mathbb{C}^k$ при отображении $(\widetilde{P}_1, \dots, \widetilde{P}_k)\colon (\mathbb{C}^*)^n \to \mathbb{C}^k$. По теореме Сарда–Бертини для почти всех точек $c \in \mathbb{C}^k$ многообразие X неособо. По той же теореме Сарда–Бертини для ограничения отображения на подмногообразие Y_i для почти всех точек $c \in \mathbb{C}^k$ многообразие X трансверсально страту Y_i.

Следствие 2. *Для полуалгебраического множества $Y \subset (\mathbb{C}^*)^n$ и многообразия X, определенного системой* (1) *с достаточно общими коэффициентами, множество $Y \cap X$ плотно в X, если и только если Y плотно в $(\mathbb{C}^*)^n$.*

Доказательство. Как известно, всякое полуалгебраическое множество можно стратифицировать. Поэтому следствие 2 вытекает из теоремы 1.

Автор признателен А. Эстерову за полезные обсуждения и за указание на статьи [4], [5], тесно связанные с настоящей работой. Автор благодарит рецензента статьи за тщательное и доброжелательное редактирование, которое помогло существенно улучшить текст.

§ 2. Смешанный объем и теорема Минковского

2.1. Смешанный объем. Один из самых первых результатов теории многогранников Ньютона – теорема Бернштейна–Кушниренко. Ниже мы напомним формулировку этой знаменитой теоремы. Для этого нам понадобятся некоторые понятия выпуклой геометрии.

Подмножество A в линейном вещественном пространстве M можно умножить на $\lambda \in \mathbb{R}$: множество λA определяется соотношением

$$c \in \lambda A \iff \exists\, a \in A \mid c = \lambda a.$$

Подмножества $A, B \subset M$ можно складывать: множество $A + B$, определенное соотношением

$$c \in A + B \iff \exists\, a \in A,\ \exists\, b \in B \mid c = a + b,$$

называется *суммой Минковского* множеств A, B. Если A и B являются *выпуклыми телами* (т. е. ограниченными замкнутыми выпуклыми множествами), то множества λA и $A + B$ тоже являются выпуклыми телами.

Фиксируем в n-мерном пространстве M меру Лебега μ, инвариантную относительно параллельных переносов (такая мера определена с точностью до положительного множителя). *Объем* $V(\Delta)$ *выпуклого тела* $\Delta \subset M$ – это его мера $\mu(\Delta)$.

Определение. *Смешанным объемом* n выпуклых тел $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ называется число $V(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$, определенное следующей *поляризационной формулой*:

$$n!\, V(\Delta_1, \dots, \Delta_n) = (-1)^{n-1} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} V(\Delta_i) + (-1)^{n-2} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} V(\Delta_{i_1} + \Delta_{i_2}) + \dots + V(\Delta_1 + \dots + \Delta_n).$$

Понятие смешанного объема ввел Минковский. Он показал, что смешанный объем – единственная функция от n выпуклых тел, которая:

1) симметрична (т. е. не меняется при перестановках аргументов);

2) полилинейна (линейность по первому аргументу означает, что

$$V(\lambda_1 \Delta_1' + \lambda_2 \Delta_1'', \dots, \Delta_n) = \lambda_1 V(\Delta_1', \dots, \Delta_n) + \lambda_2 V(\Delta_1'', \dots, \Delta_n)$$

при $\lambda_1 \geqslant 0$ и $\lambda_2 \geqslant 0$);

3) на диагонали совпадает с объемом, т. е. $V(\Delta, \dots, \Delta) = \Delta$.

Несложно показать, что смешанный объем *монотонен*, т. е. если $\Delta_1' \subset \Delta_1$, …, $\Delta_n' \subset \Delta_n$, то $V(\Delta_1', \dots, \Delta_n') \leqslant V(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$. *Неотрицательность* смешанного объема вытекает из монотонности и равенства $V(\Delta_1', \dots, \Delta_n') = 0$, где $\Delta_i' \in \Delta_i$ – точки.

Лемма 3. *Пусть* $I_1, \dots, I_n$ – *сегменты и* $\Pi = I_1 + \dots + I_n$ – *параллелепипед, равный сумме этих сегментов. Тогда*

$$V(I_1, \dots, I_n) = \frac{1}{n!} \operatorname{Vol}(\Pi). \tag{2}$$

Доказательство. Равенство (2) немедленно вытекает из поляризационной формулы для смешанного объема.

В п. 2.4 мы докажем теорему Минковского (см. п. 1.2), доставляющую критерий обращения смешанного объема в нуль.

2.2. Критерий обращения смешанного объема в нуль. Доказательство критерия использует несложную линейную алгебру.

Определение. Набор аффинных подпространств $L_1, \dots, L_m$ в линейном пространстве M называется *невырожденным*, если для любого непустого набора индексов $J \subset \{1, \dots, m\}$ справедливо неравенство $\dim \sum_{i \in J} L_i \geqslant |J|$, где $|J|$ – число элементов в множестве J. Набор $L_1, \dots, L_m$ называется *вырожденным*, если он не является невырожденным.

Для всякого выпуклого тела $\Delta \subset L$ обозначим через $L(\Delta)$ минимальное аффинное пространство, содержащее Δ. Легко видеть, что *набор выпуклых тел* $\Delta_1, \dots, \Delta_m \subset L$ *является зависимым* (см. п. 1.2), *если набор аффинных подпространств* $L(\Delta_1), \dots, L(\Delta_m)$ *вырожден*.

2.3. Теорема из линейной алгебры. Пусть $M_1, \dots, M_n$ – линейные подпространства в некотором объемлющем пространстве M.

Теорема 4. *Из пространств* $M_1,\dots,M_n$ *можно выбрать независимые векторы* $\{v_i\}$, $1\leqslant i\leqslant n$, *так, что* $v_1\in M_1$, …, $v_n\in M_n$, *если и только если набор пространств* $M_1,\dots,M_n$ *невырожден.*

Доказательству теоремы 4 предпошлем следующие леммы 5–7 (из которых не вполне очевидна лишь лемма 6).

Лемма 5. *Если существуют независимые векторы* $v_1\in M_1$, …, $v_n\in M_n$, *то набор пространств* $M_1,\dots,M_n$ *невырожден.*

Доказательство. Для всякого поднабора $M_{i_1},\dots,M_{i_k}$ выполнено неравенство $\dim(M_{i_1}+\dots+M_{i_k})\geqslant k$, так как векторы $v_{i_1}\in M_{i_1}$, …, $v_{i_k}\in M_{i_k}$ линейно зависимы.

Лемма 6. *Если набор пространств* $M_1,\dots,M_n$ *невырожден, то найдется пространство* $V_n\subset M_n$ *такое, что* $\dim V_n=1$ *и набор пространств* $M_1,\dots,M_{n-1},V_n$ *невырожден.*

Доказательство. По условию для любого непустого $J\subset\{1,\dots,n\}$ имеем $\dim M_J\geqslant|J|$. Пусть J^* – непустое подмножество отрезка натурального ряда $\{1,\dots,n-1\}$. Скажем, что J^* *первого типа*, если $M_{J^*}\cap M_n\neq M_n$. Если же $M_{J^*}\cap M_n=M_n$, то будем говорить, что J^* *второго типа*. Если J^* второго типа, то $\dim M_{J^*}\geqslant(|J^*|+1)$. Действительно, если $M_n\subset M_{J^*}$, то $M_{J^*}\cup M_n=M_{J^*}$. Но $M_{J^*}\cup M_n=M_J$, где $J=J^*\cup\{n\}$, а $\dim M_J$ по условию не меньше, чем $|J|=|J^*|+1$.

Объединение D всех множеств вида $M_{J^*}\cap M_n$, где J^* – множество первого типа, не может совпадать с M_n (объединение конечного числа собственных подпространств не может покрывать все пространство). Покажем, что в качестве V_n можно взять пространство, порожденное любым ненулевым вектором $v\in M_n\setminus D$.

Действительно, покажем, что набор пространств $T_1,\dots,T_n$ независим, где $T_i=M_i$ при $1\leqslant i\leqslant n-1$ и $T_n=V_n$ порождено некоторым ненулевым вектором $v\in M_n\setminus D$. Для всякого непустого множества $J^*\subset\{1,\dots,n-1\}$ имеем $T_{J^*}=M_{J^*}$ и $\dim T_{J^*}=\dim M_{J^*}\geqslant|J^*|$. Рассмотрим теперь множество $J=J^*\cup\{n\}$. Если J^* первого типа, то пространство $T_n=V_n$ не содержится в $T_{J^*}=M_{J^*}$ и $\dim T_J\geqslant\dim T_{J^*}+1\geqslant|J^*|+1=|J|$. Если J^* второго типа, то $T_n\subset T_{J^*}$ и $\dim T_J=\dim T_{J^*}=\dim M_{J^*}\geqslant|J^*|+1=|J|$. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Если набор пространств* $M_1,\dots,M_n$ *невырожден, то найдется невырожденный набор одномерных пространств* $V_1,\dots,V_n$ *такой, что* $V_1\subset M_1,\dots,V_n\subset M_n$.

Доказательство. Согласно лемме 6 в наборе пространств $M_1,\dots,M_n$ можно заменить M_n одномерным подпространством V_n так, чтобы набор пространств $M_1,\dots,M_{n-1},V_n$ оставался независимым. Перенумеровав пространства и воспользовавшись леммой 6, можно заменить M_{n-1} одномерным подпространством V_{n-1} так, чтобы набор пространств $M_1,\dots,M_{n-2},V_{n-1},V_n$ оставался независимым. И так далее. Лемма 7 доказана.

Теорема 4 вытекает из лемм 5 и 7.

2.4. Теорема Минковского. Используя теорему 4, докажем теорему Минковского, которую мы разобьем на теоремы 8 и 9.

ТЕОРЕМА 8. *Если набор аффинных пространств $L(\Delta_1),\dots,L(\Delta_n)$ невырожден, то $V(\Delta_1,\dots,\Delta_n)>0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M_1,\dots,M_n$ – линейные пространства, параллельные аффинным пространствам $L(\Delta_1),\dots,L(\Delta_n)$. Так как набор пространств $M_1,\dots,M_n$ невырожден, то по теореме 4 можно выбрать независимые векторы $v_1\in M_1,\dots,v_n\in M_n$. Пусть $I_1\subset\Delta_1,\dots,I_n\subset\Delta_n$ – сегменты, параллельные прямым, натянутым на векторы $v_1,\dots,v_n$. Согласно формуле (2) для смешанного объема сегментов имеем $V(I_1,\dots,I_n)>0$. Согласно монотонности смешанного объема $V(\Delta_1,\dots,\Delta_n)\geqslant V(I_1,\dots,I_n)>0$. Теорема 8 доказана.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть набор аффинных пространств $L(\Delta_1),\dots,L(\Delta_n)$ вырожден. Тогда $V(\Delta_1,\dots,\Delta_n)=0$.*

Докажем сначала следующую лемму.

ЛЕММА 10. *Теорема 9 справедлива, если дополнительно известно, что каждое из тел $\Delta_1,\dots,\Delta_n$ является параллелепипедом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Смешанный объем инвариантен относительно параллельных переносов. Поэтому можно считать, что точка 0 является вершиной каждого из параллелепипедов Δ_i. Пусть $I_i^1,\dots,I_i^{m_i}$ – стороны параллелепипеда Δ_i, выходящие из точки 0, где $i=1,\dots,n$. Для каждого i имеем $\Delta_i=I_i^1+\dots+I_i^{m_i}$. В силу полилинейности смешанного объема справедливо равенство

$$V(\Delta_1,\dots,\Delta_n)=\sum_{1\leqslant j_1\leqslant m_1,\dots,1\leqslant j_n\leqslant m_n}V(I_1^{j_1},\dots,I_n^{j_n}).$$

Согласно теореме 4 и формуле (2) имеем $V(I_1^{j_1},\dots,I_n^{j_n})=0$. Лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы 9.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Для каждого из тел Δ_i возьмем произвольный параллелепипед Δ_i', содержащий тело Δ_i и лежащий в $L(\Delta_i)$. По лемме 10 имеем $V(\Delta_1',\dots,\Delta_n')=0$. В силу монотонности и неотрицательности смешанного объема $V(\Delta_1',\dots,\Delta_n')\geqslant V(\Delta_1,\dots,\Delta_n)\geqslant 0$. Доказательство теоремы 9, а вместе с ней и теоремы Минковского, завершено.

§ 3. Теорема Бернштейна–Кушниренко и близкие результаты

Если в n-мерном вещественном пространстве M фиксирована дискретная решетка Λ полного ранга, то в M фиксирован *целочисленный объем*, инвариантный относительно параллельных переносов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Целочисленным объемом* на пространстве $M\supset\Lambda$ называется объем, ассоциированный с инвариантной относительно параллельных переносов мерой μ, нормированный условием $\mu(\Pi)=1$, где Π – параллелепипед, натянутый на векторы $e_1,\dots,e_n$, порождающие решетку Λ.

В этом параграфе мы расматриваем целочисленный объем на пространстве $\mathbb{R}^n$, содержащем решетку $\mathbb{Z}^n$, в которой лежат носители рассматриваемых полиномов Лорана.

Сколько корней в $(\mathbb{C}^*)^n$ имеет общая система из $k = n$ уравнений (1) с носителями $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{Z}^n$, выпуклые оболочки которых равны $\Delta_1, \dots, \Delta_n$? Ответ на этот вопрос дает следующая знаменитая теорема.

Теорема Бернштейна–Кушниренко. *Общая система из $k = n$ уравнений (1) имеет лишь некратные корни в $(\mathbb{C}^*)^n$, и их число равно $n!\,V(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$.*

Сейчас найдено много различных доказательств этой замечательной теоремы. Схема одного из них приведена в § 8 после теоремы 29. Д. Н. Бернштейн нашел критерий совместности общей системы (1).

Теорема 11. *Достаточно общая система (1) несовместна, если и только если многогранники $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ зависимы.*

Доказательство. Легко показать, что достаточно общая система (1) либо определяет гладкое $(n-k)$-мерное многообразие, либо несовместна. Поэтому если $k > n$, то система (1) несовместна. При $k > n$ многогранники $\Delta_1, \dots, \Delta_k \subset \mathbb{R}^n$ автоматически зависимы, что и завершает доказательство при $k > n$. Если $k = n$, то теорема немедленно вытекает из теоремы Бернштейна–Кушниренко и теоремы Минковского. Пусть теперь $k < n$. Добавим к системе (1) общие линейные уравнения

$$P_{n-k+1} = \dots = P_n = 0, \tag{3}$$

в которых $P_i = \sum a_{i,j} z_j + b_i = 0$, где z_j – координаты в торе $(\mathbb{C}^*)^n$ и $a_{i,j}$, b_i – достаточно общие комплексные числа. Многогранники Ньютона $\Delta_{n-k+1}, \dots, \Delta_n$ полиномов первой степени $P_{n-k+1}, \dots, P_n$ равны между собой и равны стандартному n-мерному единичному симплексу Δ. Достаточно общая система, состоящая из уравнений (1) и (3), совместна, если и только если множество решений системы (1) непусто. Теперь случай $k < n$ также сводится к теоремам Бернштейна–Кушниренко и Минковского, так как наборы многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ и $\Delta_1, \dots, \Delta_k, \Delta_{n-k+1}, \dots, \Delta_n$ зависимы или независимы одновременно.

Приведем другую формулировку теоремы 11.

Теорема 11$'$. *Достаточно общая система (1) несовместна, если и только если дефект некоторого множества J для набора многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ отрицателен.*

Как геометрически описать наборы носителей $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{Z}^n$, для которых общая система из $k = n$ уравнений (1) имеет ровно один корень? Другими словами, как описать наборы целочисленных многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, смешанный объем которых равен $1/n!$. Приведенная ниже теорема 12, найденная в [5], отвечает на этот вопрос, сводя его к аналогичному вопросу в пространстве меньшей размерности. Для формулировки теоремы 12 нам понадобится несколько общих определений, нужных и для остального материала статьи.

Многогранники Ньютона Δ_i лежат в n-мерном линейном пространстве M, снабженном решеткой $\Lambda \approx \mathbb{Z}^n$. Для каждого непустого подмножества J обозначим через $L(\Delta_J)$ аффинное пространство, натянутое на многогранник Δ_J, и через $M(\Delta_J)$ линейное пространство, параллельное аффинному пространству $L(\Delta_J)$. Обозначим через $M^\perp(\Delta_J)$ факторпространство пространства M по подпространству $M(\Delta_J)$.

Пространство $M(\Delta_J)$ содержит решетку $\Lambda_J = \Lambda \cap M(\Delta_J)$ полного ранга. Поэтому в пространстве $M(\Delta_J)$ определен целочисленный объем. Поляризация этого объема – целочисленный смешанный объем *в смысле пространства* $M(\Delta_J)$ определен для любого набора из $\dim M(\Delta_J)$ многогранников Δ_i, для каждого из которых пространство $L(\Delta_i)$ при помощи параллельного переноса переводится в $M(\Delta_J)$ (именно такой смешанный объем фигурирует в формулируемых ниже теоремах 15 и 19).

В пространстве $M^\perp(\Delta_J)$ есть факторрешетка $\Lambda^\perp = \Lambda/\Lambda_J$ полного ранга и набор из $k - |J|$ многогранников $\{\pi_{J^\perp}\Delta_i\}$, где $i \in J^\perp = \{1, \dots, k\} \setminus J$. По определению многогранник $\pi_{J^\perp}\Delta_i \subset M^\perp(\Delta_J)$ – это образ многогранника $\Delta_i \subset M(\Delta_J)$ при отображении факторизации $M(\Delta_J) \to M^\perp(\Delta_J)$. Многогранник $\pi_{J^\perp}\Delta_i \subset M^\perp(\Delta_J)$ целочисленен, т. е. его вершины лежат в решетке $\Lambda^\perp$.

Дадим еще одно определение. Целочисленный k-мерный симплекс Δ с вершинами $T_0, \dots, T_k$ называется *примитивным*, если векторы $e_i = T_i - T_0$, $i = 1, \dots, k$, порождают решетку $\Lambda \cap M(\Delta)$. Целочисленный объем примитивного симплекса равен $1/k!$.

ТЕОРЕМА 12 (см. [5]). *Целочисленные многогранники $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ имеют целочисленный смешанный объем, равный $1/n!$, если и только если*:

1) *многогранники из набора независимы*;

2) *существует поднабор из $k > 0$ многогранников, которые с точностью до параллельного переноса лежат в некотором примитивном k-мерном симплексе Δ, а образы остальных $n - k$ многогранников в пространстве $M/M(\Delta)$ имеют целочисленный смешанный объем $1/(n-k)!$.*

§ 4. Вспомогательные результаты

4.1. Уменьшение числа неизвестных. Пусть многогранники Ньютона $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ полиномов Лорана, фигурирующих в системе (1), таковы, что многогранник $\Delta = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \Delta_i$ имеет размерность $m < n$. Тогда система (1) сводится к системе от m переменных. Напомним, как это делается.

Линейное пространство $M(\Delta)$, параллельное минимальному аффинному пространству $L(\Delta)$, содержащему многогранник Δ, имеет размерность m и содержит решетку Λ_Δ полного ранга. Решетку Λ_Δ можно отождествить с решеткой $\mathbb{Z}^m$ характеров m-мерного тора $(\mathbb{C}^*)^m$. Вложению $\Lambda_\Delta \subset \Lambda \approx \mathbb{Z}^n$ двойственен гомоморфизм $\pi_\Delta\colon (\mathbb{C}^*)^n \to (\mathbb{C}^*)^m$ тора $(\mathbb{C}^*)^n$ на тор $(\mathbb{C}^*)^m$. Отметим, что тор $(\mathbb{C}^*)^n$ можно представить в виде прямого произведения $(\mathbb{C}^*)^n = (\mathbb{C}^*)^m \times (\mathbb{C}^*)^{n-m}$ таким образом, чтобы отображение π_Δ совпадало с проекцией π_1 тора $(\mathbb{C}^*)^n$ на первый сомножитель.

Умножая полином Лорана P_i на подходящий моном z^{q_i}, можно добиться, чтобы носитель $A_i + q_i$ полинома Лорана $z^{q_i} P_i$ лежал в пространстве $M(\Delta)$.

Многообразие X при этом не меняется, так как уравнения $P_i = 0$ и $z^{q_i}P_i = 0$ в торе $(\mathbb{C}^*)^n$ эквивалентны. Учитывая изоморфизм решетки Λ_Δ с решеткой характеров $\mathbb{Z}^m$ тора $(\mathbb{C}^*)^m$, можно считать, что носители $B_i = A_i + q_i$ лежат в решетке $\mathbb{Z}^m$ и можно воспринимать полином Лорана $z^{q_i}P_i$ как полином Лорана Q_i на торе $(\mathbb{C}^*)^m$. При этом выполняется равенство $z^{q_i}P_i = \pi^*_\Delta Q_i$.

Сопоставим системе уравнений (1) в торе $(\mathbb{C}^*)^n$ систему уравнений

$$Q_1 = \dots = Q_k = 0 \tag{4}$$

в торе $(\mathbb{C}^*)^m$, зависящую от меньшего числа $m < n$ переменных. Многообразие $\widetilde{X}$, определенное системой (4), следующим образом связано с многообразием X, определенным системой (1): $X = \pi^{-1}_\Delta(\widetilde{X})$. Учитывая, что π_Δ эквивалентно проекции π_1 тора $(\mathbb{C}^*)^n = (\mathbb{C}^*)^m \times (\mathbb{C}^*)^{n-m}$ на первый сомножитель, получаем, что X изоморфно $\widetilde{X} \times (\mathbb{C}^*)^{n-m}$. Итак, изучение многообразия X сводится к изучению многообразия $\widetilde{X}$, определенного системой, зависящей от меньшего числа переменных.

4.2. Многообразия, определенные системой (1) и ее некоторой подсистемой. Пусть $J = \{i_1, \dots, i_l\}$ и $J^\perp = \{j_1, \dots, j_{k-l}\}$ – два непустых дополнительных друг к другу подмножества индексов $\{1, \dots, k\}$, нумерующих уравнения системы (1). Рассмотрим две системы (1) в торе $(\mathbb{C}^*)^n$:

$$P_{i_1} = \dots = P_{i_l} = 0, \tag{5}$$

$$P_{j_1} = \dots = P_{j_{k-l}} = 0. \tag{6}$$

Пусть многогранник $\Delta_J = \sum_{i\in J}\Delta_i$ имеет размерность $m < n$. Не ограничивая общности, можно считать, что многогранники Ньютона $\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_l}$ лежат в линейном пространстве $M(\Delta_J)$. Свяжем с системой (5) систему уравнений

$$Q_{i_1} = \dots = Q_{i_l} = 0 \tag{7}$$

в торе $(\mathbb{C}^*)^m$ такую, что $P_i = \pi^*_{\Delta_J}Q_i$ при $i \in J$ и $\pi_{\Delta_J}\colon (\mathbb{C}^*)^n \to (\mathbb{C}^*)^m$ – гомоморфизм, описанный в предыдущем пункте.

Пусть X_1, X_2 и $X = X_1 \cap X_2$ – многообразия в торе $(\mathbb{C}^*)^n$, определенные системами (5), (6) и системой (1), содержащей уравнения систем (5) и (6). Пусть $\widetilde{X}_1$ – многообразие в торе $(\mathbb{C}^*)^m$, определенное системой (7). Для каких наборов многогранников Ньютона $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ образ $\pi_{\Delta_J}(X)$ многообразия X при гомоморфизме $\pi_{\Delta_J}\colon (\mathbb{C}^*)^n \to (\mathbb{C}^*)^m$ будет плотен в многообразии $\widetilde{X}_1$? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 13. *Образ $\pi_{\Delta_J}(X)$ многообразия X при гомоморфизме*

$$\pi_{\Delta_J}\colon (\mathbb{C}^*)^n \to (\mathbb{C}^*)^m$$

плотен в многообразии $\widetilde{X}_1$, если и только если дефект множества J для набора многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ не больше, чем дефект любого множества индексов $\tilde{J}$, содержащего множество J.

Отложим доказательство до конца этого пункта.

А сейчас выясним условия, при которых образ полного пересечения при гомоморфизме плотен в факторторе.

Рассмотрим гомоморфизм $\pi\colon (\mathbb{C}^*)^n \to (\mathbb{C}^*)^m$ тора $(\mathbb{C}^*)^n$ на тор $(\mathbb{C}^*)^m$. Пусть $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$ – алгебраическое многообразие, определенное общей системой уравнений (1). Рассмотрим ограничение $\pi\colon X \to (\mathbb{C}^*)^m$ отображения π на многообразие X. Ответим на следующий вопрос: для каких наборов носителей $A_1, \dots, A_k$ образ $\pi(X)$ плотен в торе $(\mathbb{C}^*)^m$? Ответ зависит от гомоморфизма π и от выпуклых оболочек $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ носителей $A_1, \dots, A_k$.

На первый взгляд может показаться, что так как система (1) является достаточно общей, то для плотности образа нужно только чтобы $n-k \geqslant m$. Если многогранники $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ имеют полную размерность n, то это действительно так. Но в общем случае ответ на этот вопрос сложнее.

С гомоморфизмом π связано вложение $\pi^*\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ линейного пространства $\mathbb{R}^m$, натянутого на решетку характеров тора $(\mathbb{C}^*)^m$, в линейное пространство $\mathbb{R}^n$, натянутое на решетку характеров тора $(\mathbb{C}^*)^n$.

Для краткости обозначений положим $M = \pi^*(\mathbb{R}^m)$ и будем обозначать отображение факторизации $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/M = M^\perp$ через $\pi_{M^\perp}$.

Теорема 14. *Образ $\pi(X)$ плотен в торе $(\mathbb{C}^*)^m$, если и только если многогранники $\pi_{M^\perp}(\Delta_1), \dots, \pi_{M^\perp}(\Delta_k) \subset M^\perp$ независимы.*

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений $Q_1 = \dots = Q_m = 0$ в торе $(\mathbb{C}^*)^m$, где $Q_1, \dots, Q_m$ – набор достаточно общих линейных полиномов от координат $z_1, \dots, z_m$ тора $(\mathbb{C}^*)^m$. Полиномы $Q_1, \dots, Q_m$ имеют один и тот же многогранник Ньютона – стандартный единичный координатный симплекс в $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ (определенный условиями $x \in \Delta$, если и только если все координаты точки x неотрицательны и $\sum x_i \leqslant 1$). Пусть $z \in (\mathbb{C}^*)^m$ – решение этой системы. Образ $\pi(X)$ содержит точку z, если и только если система $P_1 = \dots = P_k = \pi^*(Q_1) = \dots = \pi^*(Q_m) = 0$ в торе $(\mathbb{C}^*)^n$ совместна. Многогранники Ньютона полиномов Лорана $\pi^*(Q_j)$ равны многограннику $\pi^*(\Delta)$. Такая система совместна, если и только если многогранники $\Delta_1, \dots, \Delta_k$, $\pi^*(\Delta), \dots, \pi^*(\Delta)$ независимы в $\mathbb{R}^n$. Это условие эквивалентно независимости многогранников $\pi_{M^\perp}(\Delta_1), \dots, \pi_{M^\perp}(\Delta_k)$ в $M^\perp$.

Доказательство теоремы 13. Применим только что доказанную теорему для многообразия $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$ и гомоморфизма π_{Δ_J}, о которых идет речь в этой теореме. Образ многообразия $X = X_1 \cap X_2$ при гомоморфизме π_{Δ_J} лежит в многообразии $\widetilde{X}_1$. Для каких наборов многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ множество $\pi_{\Delta_J}(X)$ плотно в $\widetilde{X}_1$? Вот ответ на этот вопрос: *множество $\pi_{\Delta_J}(X)$ плотно в $\widetilde{X}_1$, если и только если множество $\pi_{\Delta_J}(X_2)$ плотно в торе* $(\mathbb{C}^*)^m$. Действительно, $\pi_{\Delta_J}(X) = \pi_{\Delta_J}(X_1 \cap X_2) = \widetilde{X}_1 \cap \pi_{\Delta_J}(X_2)$ (последнее равенство справедливо, так как $X_1 = \pi^{-1}_{\Delta_J}(\widetilde{X}_1)$). Поэтому нужное утверждение вытекает из следствия 2, в котором роль полуалгебраического множества Y играет $\pi_{\Delta_J}(X_2)$, роль системы (1) играет система (7), а роль многообразия X играет многообразие $\widetilde{X}_1$. По теореме 14 получаем, что *множество $\pi_{\Delta_J}(X_2) \cap \widetilde{X}_1$ плотно в $\widetilde{X}_1$, если и только если набор многогранников $\{\pi_{\Delta_J}(\Delta_j)\}$ при $j \in J^\perp$ независим в $M^\perp(\Delta_J)$.*

Осталось переформулировать ответ. Независимость набора многогранников $\{\pi_{\Delta_J}(\Delta_j)\}$ при $j \in J^\perp$ означает, что для каждого подмножества $J^* \subset J^\perp$ выполняется неравенство $\dim \pi_{\Delta_J}(\Delta_{J^*}) - |J^*| \geqslant 0$. Положим $\tilde J = J \cup J^*$. Имеем

$$\dim \Delta_{\tilde J} = \dim(\Delta_J) + \dim \pi_{\Delta_J}(\Delta_{J^*}), \qquad |\tilde J| = |J| + |J^*|.$$

Откуда

$$|\dim \Delta_{\tilde J}| - |\tilde J| = (|\dim \Delta_J| - |J|) + (|\dim \Delta_{J^*}| - |J^*|) \geqslant |\dim \Delta_J| - |J|.$$

§ 5. Основные результаты

5.1. Теорема о редукции. Покажем, что если общая система (1) совместна, но для нее существует подмножество индексов J, имеющее нулевой дефект, то систему можно редуцировать, т.е. свести к общим системам уравнений от меньшего числа переменных.

Рассмотрим алгебраическое многообразие $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$, определенное общей системой уравнений (1) с многогранниками Ньютона $\Delta_1, \dots, \Delta_k$. Пусть выполнены следующие условия:

1) набор многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ независим;

2) дефект множества $J = \{i_1, \dots, i_m\}$ для этого набора равен нулю.

Теорема 15 (о редукции). *При выполнении условий* 1), 2) *существует разбиение многообразия X на $q = m!\, V(\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_m})$ непересекающихся подмногообразий X_i, где*:

1) *V – поляризация целочисленного объема в $M(\Delta_J)$*;

2) *каждое подмногообразие X_i изоморфно многообразию, определенному в $(\mathbb{C}^*)^{n-m}$ общей системой уравнений с набором многогранников $\{\pi_{J^\perp}\Delta_i\}$, множество индексов i в котором пробегает множество $J^\perp$.*

Сначала мы докажем теорему о редукции для некоторого специального случая.

Пусть тор $(\mathbb{C}^*)^n$ представлен в виде произведения $(\mathbb{C}^*)^m \times (\mathbb{C}^*)^{n-m}$ торов $(\mathbb{C}^*)^m$ и $(\mathbb{C}^*)^{n-m}$ и $\pi_1\colon (\mathbb{C}^*)^n \to (\mathbb{C}^*)^m$, $\pi_2\colon (\mathbb{C}^*)^n \to (\mathbb{C}^*)^{n-m}$ – проекции на сомножители. Пусть $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ – соответствующее представление линейного пространства $\mathbb{R}^n$, порожденного характерами тора $(\mathbb{C}^*)^n$ в произведение аналогичных пространств $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^{n-m}$ для торов $(\mathbb{C}^*)^m$ и $(\mathbb{C}^*)^{n-m}$, и $\tilde\pi_1$, $\tilde\pi_2$ – проекции на сомножители: $\tilde\pi_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\tilde\pi_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$.

Рассмотрим алгебраическое многообразие $X \subset (\mathbb{C}^*)^n = (\mathbb{C}^*)^m \times (\mathbb{C}^*)^{n-m}$, определенное общей системой уравнений (1) с многогранниками Ньютона $\Delta_1, \dots, \Delta_k \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. Пусть выполнены следующие условия:

1) набор многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ независим;

2) дефект множества $J_m = \{1, \dots, m\}$ для этого набора равен нулю;

3) при $1 \leqslant i \leqslant m$ выполняется включение $\Delta_i \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$, где $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Теорема 16. *При выполнении условий* 1)–3) *существует разбиение многообразия X на $q = m!\, V(\Delta_1, \dots, \Delta_m)$ непересекающихся подмногообразий X_i, где*:

1) V – *поляризация целочисленного объема в* $\mathbb{R}^m \times 0$;

2) *каждое подмногообразие* X_i *изоморфно многообразию, определенному в* $(\mathbb{C}^*)^{n-m}$ *общей системой уравнений с многогранниками* $\tilde{\pi}_2(\Delta_{m+1}), \dots, \tilde{\pi}_2(\Delta_k)$.

Доказательство. Так как многогранники Ньютона $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ лежат в $\mathbb{R}^m \times \{0\}$, то первые m уравнений $P_1 = \dots = P_m = 0$ системы (1) можно рассматривать как уравнения в торе $(\mathbb{C}^*)^m \times 1$, где 1 – единица в торе $(\mathbb{C}^*)^{n-m}$. Согласно теореме Бернштейна–Кушниренко множество $\{(u_i \times 1)\}$ решений этой системы содержит $q = m!\,V(\Delta_1, \dots, \Delta_m)$ элементов. Подсистема $P_1 = \dots = P_m = 0$ системы (1), рассматриваемая как система уравнений в торе $(\mathbb{C}^*)^m \times (\mathbb{C}^*)^{n-m}$, определяет q сдвинутых торов $\{u_i \times (\mathbb{C}^*)^{n-m}\}$, бирегулярно изоморфных тору $(\mathbb{C}^*)^{n-m}$. На каждом из них остальные уравнения $P_{m+1} = \dots = P_k = 0$ системы (1) определяют подмногообразие X_i. При изоморфизме $u_i \times (\mathbb{C}^*)^{n-m} \to (\mathbb{C}^*)^{n-m}$ система уравнений $P_{m+1} = \dots = P_k = 0$ на сдвинутом торе $u_i \times (\mathbb{C}^*)^{n-m}$ переходит в достаточно общую систему уравнений в торе $(\mathbb{C}^*)^{n-m}$ с многогранниками $\tilde{\pi}_2(\Delta_{m+1}), \dots, \tilde{\pi}_2(\Delta_k)$, а многообразие X_i переходит в многообразие решений этой системы.

Доказательство теоремы о редукции. Теорема о редукции сводится к теореме 16. Действительно, при $i \in J$, умножая полином Лорана P_i на подходящий моном z^{q_i}, можно добиться, чтобы многогранник Ньютона Δ_i полинома $z^{q_i} P_i$ лежал в пространстве $M(\Delta_J)$. Многообразие X при этом не меняется, так как уравнения $P_i = 0$ и $z^{q_i} P_i = 0$ в торе $(\mathbb{C}^*)^n$ эквивалентны. Перенумеровав, если надо, уравнения системы, можно считать, что $J = J_m$. С помощью автоморфизма тора $(\mathbb{C}^*)^n$, можно добиться, чтобы характеры из пространства $M(\Delta_J)$ перешли в характеры из координатного подпространства $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$, на котором обращаются в нуль все координаты с номерами $(m+1), \dots, n$. После этого теорема о редукции сводится к только что доказанной теореме 16.

5.2. Теорема о числе компонент. Для нас важную роль будет играть следующая теорема.

Теорема 17 (о неприводимости). *Если дефект любого непустого множества J для набора многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ положителен, то многообразие $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$, определенное достаточно общей системой* (1), *неприводимо.*

В оставшейся части статьи мы приведем доказательство и различные уточнения этой теоремы. А сейчас покажем, что эта теорема вместе с теоремой о редукции позволяет вычислить число неприводимых компонент многообразия, определенного системой (1).

Определение. Подмножество $J \subset \{1, \dots, k\}$ назовем *характеристическим* для независимого набора тел $\Delta_1, \dots, \Delta_k$, если дефект J для этого набора равен нулю, а дефект всякого большего множества $J' \supset J$ положителен.

Лемма 18. *Для любого независимого набора тел существует некоторое характеристическое множество J.*

Доказательство. По определению дефект всякого множества для независимого набора тел неотрицателен. Множества с нулевым дефектом существуют: пустое подмножество доставляет требуемый пример. Возьмем наибольшее по включению подмножество, имеющее нулевой дефект. Всякое большее множество не может иметь отрицательный или нулевой дефект. Следовательно, его дефект положителен.

Теорема 19. *Если в условиях теоремы о редукции множество J характеристическое для $\Delta_1, \dots, \Delta_k$, то многообразия X_i являются неприводимыми компонентами многообразия X (и их число равно $m!\, V(\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_m})$).*

Доказательство. Покажем, что набор многогранников $\{\pi_{J^\perp}(\Delta_i)\}$, $i \in J^\perp$, удовлетворяет условиям теоремы 17. По условию дефект J равен нулю, т. е. $\dim \Delta_J = |J|$. Для каждого непустого подмножества $J^* \subset \{1, \dots, k\} \setminus J$ положим $\tilde{J} = J \cup J^*$. Так как $J \subset \tilde{J}$ и J – характеристическое множество, то дефект множества $\tilde{J}$ для набора тел $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ положителен, т. е. $\dim \Delta_{\tilde{J}} - |\tilde{J}| > 0$ или $(\dim \Delta_{\tilde{J}} - \dim \Delta_J) - (|\tilde{J}| - |J|) > 0$. Осталось заметить, что многогранник $\sum_{i \in J^*} \pi_{J^\perp}(\Delta_i)$ имеет размерность $\dim \Delta_{\tilde{J}} - \dim \Delta_J$. Поэтому множество J^* имеет положительный дефект для набора многогранников $\{\pi_{J^\perp}(\Delta_i)\}$. По теореме 17 многообразия X_i неприводимы.

§ 6. Числа h^p полных пересечений

6.1. Голоморфные формы на компактных комплексных многообразиях. На гладком компактном n-мерном комплексном алгебраическом многообразии M для каждого $p \geqslant 0$ определено конечномерное комплексное пространство голоморфных p-форм. Его размерность обозначается $h^p(M)$. *Арифметическим родом* многообразия M называется число

$$\chi(M) = \sum_{p \geqslant 0} (-1)^p h^p(M).$$

(Мы пользуемся определением из [6, формула (2)]. Отметим, что иногда арифметическим родом называют немного другой инвариант многообразия.) Число $h^0(M)$ равно числу компонент многообразия M. При $p > n$ число $h^p(M) = 0$, так как на комплексном n-мерном многообразии всякая голоморфная p-форма при $p > n$ тождественно равна нулю.

При рациональном отображении $\pi\colon M_1 \to M_2$ компактного многообразия M_1 в компактное многообразие M_2 прообраз $\pi^*\omega$ голоморфной формы ω на M_2 является голоморфной формой на M_1. Поэтому размерность $h^p(M)$ пространства голоморфных p-форм и его арифметический род – инварианты компактного многообразия M, сохраняющиеся при бирациональных изоморфизмах.

Можно определить число $h^p(M)$ и для некомпактных гладких алгебраических многообразий. Для этого надо выбрать любую гладкую компактификацию $\overline{M}$ многообразия M, бирационально эквивалентную M, и положить $h^p(M)$ равным $h^p(\overline{M})$. Это определение корректно: по теореме Хиронаки о разрешении особенностей у всякого гладкого M существует гладкая компактификация, бирационально изоморфная M.

В комплексном торе для достаточно общих полных пересечений X с фиксированными носителями многогранники Ньютона помогают явно построить формы старшего порядка, голоморфные на некоторой (а значит, и на любой) гладкой компактификации $\overline{X}$ многообразия X (см. [1]). В точности такая же конструкция иногда позволяет явно построить и формы некоторых промежуточных порядков, голоморфные на $\overline{X}$.

Напомним следующее определение (см. [1], [2]). Для целочисленного выпуклого многогранника Δ *число* $B^+(\Delta)$ – *это число целых точек, лежащих строго внутри многогранника* Δ *в топологии минимального аффинного пространства* $L(\Delta)$, *содержащего* Δ.

В следующей теореме мы используем обозначения из п. 4.2: в ней многообразия $\widetilde{X}_1$, X_1, X_2 и X, многогранники $\Delta_1,\dots,\Delta_k$, множества J и $J^\perp$, число $l=|J|$ такие же, как в п. 4.2.

Теорема 20. *Пусть*:

1) $\dim\Delta_J=m$;

2) $B^+(\Delta_J)>0$;

3) *для всякого множества индексов* $\tilde{J}\subset\{1,\dots,k\}$, *содержащего* J, *выполняется неравенство* $\dim\Delta_{\tilde{J}}-|\tilde{J}|\geqslant\dim\Delta_J-|J|$.

Тогда $h^{m-l}(X)>0$.

Доказательство. Рассмотрим многообразие $\widetilde{X}_1$, определенное в $(\mathbb{C}^*)^m$ системой (7), и форму ω_{m-l}, определенную на многообразии $\widetilde{X}_1$ формулой

$$\omega_{m-l}=z^q\frac{dz_1}{z_1}\wedge\dots\wedge\frac{dz_m}{z_m}/dQ_{i_1}\wedge\dots\wedge dQ_{i_l}, \tag{8}$$

где q – любая целая точка, лежащая внутри многогранника $\pi_{\Delta_J}(\Delta_J)$ (такая точка существует, так как $B^+(\Delta_J)>0$). Согласно утверждению из [1, § 2] форма ω_{m-l} голоморфна на некоторой (а значит, и на любой) гладкой компактификации многообразия $\widetilde{X}_1$. Многообразие X_1 эквивалентно произведению $\widetilde{X}_1\times(\mathbb{C}^*)^{n-m}$, и при этой эквивалентности проекция $\pi_{\Delta_j}\colon X_1\to\widetilde{X}_1$ переходит в проекцию на первый сомножитель. Форма $\pi^*_{\Delta_j}\omega_{m-l}$ голоморфна на компактификации X_1, равной произведению любых гладких компактификаций многообразий $\widetilde{X}_1$ и $(\mathbb{C}^*)^{n-m}$. Поэтому форма $\pi^*_{\Delta_j}\omega_{m-l}$ голоморфна на любой компактификации многообразия X_1.

Пусть M – достаточно полная торическая компактификация тора $(\mathbb{C}^*)^n$ для набора многогранников $\Delta_1,\dots,\Delta_k$ (см. [2] и § 7 настоящей статьи). Согласно [2] замыкания $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ в M многообразий X_1 и X_2 являются гладкими трансверсально пересекающимися многообразиями, а их пересечение $\overline{X}_1\cap\overline{X}_2$ является гладким замыканием многообразия $X=X_1\cap X_2$. Форма $\pi^*_{\Delta_j}\omega_{m-l}$ голоморфна на $\overline{X}_1$, и, следовательно, она голоморфна на $\overline{X}\subset\overline{X}_1$. Как видно из (8), форма ω_{m-l} нигде не обращается в нуль на $\widetilde{X}_1$. По теореме 13 образ $\pi_{\Delta_j}(X)$ плотен в $\widetilde{X}_1$, поэтому форма $\pi^*_{\Delta_j}\omega_{m-l}$ не обращается в тождественный нуль на многообразии X. Форма $\pi^*_{\Delta_j}\omega_{m-l}$ голоморфна на замыкании $\overline{X}$ многообразия X в M. Поэтому $h^{m-l}(X)>0$. Теорема доказана.

6.2. Когомологии и числа h^p. С дивизором D на неособом проективном многообразии M ассоциирован пучок $\Omega(M,D)$ ростков мероморфных функций f на M таких, что $(f)+D\geqslant 0$. Если $D\leqslant 0$, то ростки сечений пучка являются ростками регулярных функций. Нам понадобятся лишь такие пучки.

Будем обозначать $H^*(M, D)$ когомологии многообразия M с коэффициентами в $\Omega(M, D)$. Нулевой дивизор мы будем опускать в обозначениях: символом $H^*(M)$ мы будем обозначать когомологии M с коэффициентами в пучке ростков регулярных функций. Когомологии $H^*(M)$ ответственны за размерности $h^p(M)$ пространств голоморфных p-форм на M, а именно, $h^p(M) = \dim H^p(M)$. В частности, $\dim H^0(M)$ равно числу компонент многообразия M и $H^p(M) = 0$ при $p > \dim M$.

Нам понадобятся следующие общие определения. Линейные подпространства $L_1, \dots, L_k$ *взаимно трансверсальны* в объемлющем пространстве L, если коразмерность в L пересечения любой подгруппы этих пространств равна сумме коразмерностей в L пространств из этой группы (в частности, если сумма коразмерностей подпространств больше, чем размерность пространства L, то подпространства не могут быть взаимно трансверсальными). Подмногообразия $M_1, \dots, M_k$ *взаимно трансверсальны* в объемлющем многообразии M, если в каждой точке пересечения любой подгруппы этих многообразий их касательные пространства взаимно трансверсальны в касательном пространстве к M в точке пересечения.

Пусть на M фиксирован дивизор M^∞, являющийся объединением гладких взаимно трансверсальных дивизоров M_j^∞. Рассмотрим кольцо R мероморфных функций на M, ограничения которых на $M \setminus M_\infty$ регулярны. Нас будут интересовать полные пересечения в $M \setminus M^\infty$, заданные системами уравнений $f_1 = \dots = f_k = 0$, где $f_i \in R$. Всякий дивизор D на M раскладывается в сумму $D^0 + D^\infty$, в которой дивизор D^0 не имеет компонент с носителями в M^∞, а носитель дивизора D^∞ лежит в M^∞.

Пусть $(f) = D^0 + D^\infty$ – разложение дивизора (f) функции $f \in R$. Носитель дивизора D^0 лежит в замыкании гиперповерхности, определенной в $M \setminus M^\infty$ уравнением $f = 0$. Дивизор D^∞ линейно эквивалентен дивизору[4] $-D^0$. Для наших целей можно ограничиться уравнениями $f = 0$, для которых дивизор D^∞ из разложения (f) отрицателен. Ниже мы всегда предполагаем это условие выполненным.

Пусть система $f_1 = \dots = f_k = 0$, $f_i \in R$, определяет полное пересечение в $M \setminus M^\infty$ и $(f_i) = D_i^0 + D_i^\infty$ – разложения дивизоров функций f_i. Пусть $D_1^0, \dots, D_k^0$ – неособые дивизоры в M, имеющие непустое пересечение. Мы будем предполагать, что в совокупности все дивизоры D_i^0 и M_j^∞ (где M_j^∞ – составляющие дивизора M^∞) взаимно трансверсальны. Можно получить значительную информацию о числах h^p полного пересечения, зная размерности групп когомологий $H^*(M, n_1 D_1^\infty + \dots + n_k D_k^\infty)$, $n_i = \{0, 1\}$, исходного многообразия M. Напомним, как это делается [6].

6.3. Точные последовательности. Для всякого m, $1 \leqslant m \leqslant k$, положим $M_m = D_1^0 \cap \dots \cap D_m^0$. В последовательности $M = M_0 \supset \dots \supset M_k$ каждое следующее многообразие является гиперповерхностью в предыдущем. Для всякого

[4]Здесь и далее мы используем немного другие обозначения, чем в статьях [1], [2], на которые мы ссылаемся. Основное отличие в знаке. Дивизоры и когомологии, которые мы обозначаем D^∞, Δ^∞, $H^*(M, \Delta^\infty)$, в [1], [2] обозначаются соответственно $-D_\infty$, $-\{\Delta\}$, $H^*(M, \{-\Delta\})$.

дивизора $D^\infty \leqslant 0$ и для всякого m, $1 \leqslant m \leqslant k$, рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \to \Omega(M_{m-1}, D^\infty - D^0_m) \xrightarrow{i} \Omega(M_{m-1}, D^\infty) \xrightarrow{j} \hat{\Omega}(M_{m-1}, D^\infty) \to 0. \tag{9}$$

Здесь $\Omega(M_{m-1}, D^\infty - D^0_m)$ – пучок на многообразии M_{m-1}, ассоциированный с дивизором, высеченным на M_{m-1} дивизором $D^\infty - D^0_m$ (из сделанных предположений вытекает, что многообразие M_{m-1}, носитель дивизора D^0_m и компоненты M^∞_j носителя дивизора D^∞ взаимно трансверсальны). Пучки $\Omega(M_{m-1}, D^\infty)$ и $\Omega(M_m, D^\infty)$ определяются аналогично. Пучок $\hat{\Omega}(M_{m-1}, D^\infty)$ – это тривиальное распространение пучка $\Omega(M_m, D^\infty)$ до пучка на M_{m-1}. Гомоморфизм i является вложением, и гомоморфизм j в точке $a \in M_m$ сопоставляет ростку функции на M_{m-1} его ограничение на M_m, а в точке $a \in M_{m-1} \setminus M_m$ он тривиален. Соответствующую точную последовательность когомологий можно записать в виде

$$0 \to H^0(M_{m-1}, D^\infty + D^\infty_m) \to H^0(M_{m-1}, D^\infty) \to H^0(M_m, D^\infty) \to \cdots \tag{10}$$

(так как группы когомологий пучков $\Omega(M_{m-1}, D^\infty - D^0_m)$ и $\Omega(M_{m-1}, D^\infty + D^\infty_m)$, а также пучков $\hat{\Omega}(M_m, D^\infty)$ и $\Omega(M_{m-1}, D^\infty)$ канонически изоморфны). Для всякого многообразия $\mathcal{M}$ и дивизора $\mathcal{D}$ на нем обозначим через $\chi(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ эйлерову характеристику $\mathcal{M}$ с коэффициентами в $\Omega(\mathcal{M}, \mathcal{D})$. Эйлерова характеристика многообразия с коэффициентами в пучке равна сумме его эйлеровых характеристик с коэффициентами в подпучке и в факторпучке. Точные последовательности (10) позволяют найти числа $\chi(M_k, D^\infty)$. Приведем ответ для $D^\infty = 0$: нас интересует лишь число $\chi(M_k)$.

Теорема 21. *Арифметический род $\chi(M_k)$ многообразия M_k равен*

$$\chi(M) - \sum_i \chi(M, D^\infty_i) + \sum_{i<j} \chi(M, D^\infty_i + D^\infty_j) - \cdots + (-1)^k \chi\biggl(M, \sum_{1\leqslant i\leqslant k} D^\infty_i\biggr).$$

Для непустого множества $J \subset \{1, \dots, k\}$ положим $D^\infty_J = \sum_{i\in J} D^\infty_i$.

Теорема 22. *Справедлива оценка*

$$h^i(M_k) \leqslant h^i(M) + \sum_{J\neq\varnothing} \dim H^{i+|J|}(M, D^\infty_J).$$

Доказательство. Перепишем оценку из теоремы, обобщим ее и докажем обобщенную оценку. Для $J = \varnothing$ положим $D^\infty_J = 0$. Оценку из теоремы можно переписать в виде $h^i(M_k) \leqslant \sum_J \dim H^{i+|J|}(M, D^\infty_J)$ (суммирование ведется по всем подмножествам J, включая $J = \varnothing$), так как $\dim H^i(M, 0) = h^i(M)$. Получим более общее неравенство, совпадающее с нужным при $D^\infty = 0$: для всякого дивизора $D^\infty \leqslant 0$ справедливо соотношение

$$\dim H^i(M_k, D^\infty) \leqslant \sum_J \dim H^{i+|J|}(M, D^\infty + D^\infty_J).$$

Докажем это соотношение индукцией по k. Для любого дивизора $D^\infty \leqslant 0$ и любых j, $0 \leqslant j$, и m, $1 \leqslant m \leqslant k$, из отрезка

$$\to H^j(M_{m-1}, D^\infty) \to H^j(M_m, D^\infty) \to H^{j+1}(M_{m-1}, D^\infty + D_m^\infty) \to \cdots$$

точной последовательности (10) вытекает неравенство

$$\dim H^j(M_m, D^\infty) \leqslant \dim H^j(M_{m-1}, D^\infty) + \dim H^{j+1}(M_{m-1}, D^\infty + D_m^\infty). \tag{11}$$

Для $k = 1$ нужное утверждение совпадает с неравенством (11) при $j = i$ и $m = 1$. Пусть теорема доказана для $k - 1$.

Для всякого $J \subset \{1, \dots, k\}$ положим $J^* = J \cap \{1, \dots, k-1\}$. Тогда либо $J = J^*$, либо $J = J^* \cup \{k\}$. В первом случае

$$|J| = |J^*|, \qquad D^\infty + D_J^\infty = D^\infty + D_{J^*}^\infty. \tag{12}$$

Во втором случае

$$|J| = |J^*| + 1, \qquad D^\infty + D_J^\infty = D^\infty + D_{J^*}^\infty + D_k^\infty. \tag{13}$$

По индукционному предположению для неотрицательного дивизора D^∞ при любом $i \geqslant 0$ имеем

$$\dim H^i(M_{k-1}, D^\infty) \leqslant \sum H^{i+|J^*|}(M, D^\infty + D_{J^*}^\infty), \tag{14}$$

где суммирование ведется по всем подмножествам $J^* \subset \{1, \dots, k-1\}$.

По индукционному предположению для всякого дивизора $D^\infty + D_k^\infty \leqslant 0$ и числа $i + 1$ имеем

$$\dim H^{i+1}(M_{k-1}, D^\infty + D_k^\infty) \leqslant \sum \dim H^{|J^*|+i+1}(M, D_{J^*}^\infty + D_k^\infty + D^\infty), \tag{15}$$

где суммирование ведется по всем подмножествам $J^* \subset \{1, \dots, k-1\}$.

Подставляя в неравенство (11) правые части неравенств (14) и (15) вместо чисел $\dim H^i(M_{k-1}, D^\infty)$ и $\dim H^{i+1}(M_{k-1}, D^\infty + D_k^\infty)$ и учитывая соотношения (12) и (13), получим требуемое неравенство для параметров k, i и дивизора $D^\infty \leqslant 0$. Теорема доказана.

Следствие 23. *Пусть для некоторого i при всяком $J \neq \varnothing$ выполнены равенства $H^{i+|J|}(M, D_J^\infty) = 0$. Тогда $h^i(M_k) \leqslant h^i(M)$.*

§ 7. Торические компактификации

Напомним некоторые результаты о торических компактификациях (см. [7]) и об их применениях в теории многогранников Ньютона (см. [1], [2]). С тором $(\mathbb{C}^*)^n$, кроме пространства характеров $\mathbb{R}^n$, связано *пространство однопараметрических групп* $(\mathbb{R}^n)^*$, наделенное решеткой $(\mathbb{Z}^n)^* \subset (\mathbb{R}^n)^*$. Целой точке $m = (m_1, \dots, m_n) \in (\mathbb{Z}^n)^*$ соответствует однопараметрическая группа – гомоморфизм $t^m \colon \mathbb{C}^* \to (\mathbb{C}^*)^n$, переводящий точку $t \in \mathbb{C}^*$ в точку $(t^{m_1}, \dots, t^{m_n}) \in (\mathbb{C}^*)^n$. Композиция гомоморфизма $t^m \colon \mathbb{C}^* \to (\mathbb{C}^*)^n$ и характера $z^k \colon (\mathbb{C}^*)^n \to \mathbb{C}^*$, где $z^k = z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$, – это гомоморфизм $t^{\langle k,m \rangle} \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, где $\langle k, m\rangle = k_1m_1 + \dots + k_nm_n$. Спаривание $\langle k, m\rangle$ продолжается по линейности на пространства характеров и однопараметрических групп и задает двойственность между ними.

Конечным рациональным конусом в пространстве $(\mathbb{R}^n)^*$ называется подмножество в этом пространстве, определенное конечным числом линейных неравенств $\{\langle x, m_j\rangle \leqslant 0\}$, в которых $m_j \in \mathbb{Z}^n$ – целые точки двойственного пространства $\mathbb{R}^n$. Каждая грань конечного рационального конуса, в свою очередь, является конечным рациональным конусом.

Полным веером в пространстве $(\mathbb{R}^n)^*$ называется конечное множество $F = \{\sigma_i\}$ конечных рациональных конусов σ_i такое, что:

1) $\bigcup \sigma_i = (\mathbb{R}^n)^*$;

2) конусы $\sigma_i \in F$ не содержат линейных подпространств положительной размерности;

3) для каждой пары конусов $\sigma_i, \sigma_j \in F$ их пересечение $\sigma_i \cap \sigma_j$ лежит в F и является гранью в конусе σ_i и в конусе σ_j.

Торической компактификацией называется нормальное полное алгебраическое многообразие M, содержащее тор $(\mathbb{C}^*)^n$, на которое алгебраически продолжается групповое действие тора $(\mathbb{C}^*)^n$ на самом себе. Всякая торическая компактификация M под действием тора $(\mathbb{C}^*)^n$ распадается на конечное множество орбит $\{O_i\}$, среди которых есть ровно одна n-мерная орбита – тор $(\mathbb{C}^*)^n$.

Каждой торической компактификации M можно сопоставить полный веер F_M в пространстве однопараметрических групп и установить взаимно однозначное соответствие $\rho\colon F_M \to \{O_i\}$ между F_M и множеством орбит $\{O_i\}$ в M таким образом, что:

1) $\dim_{\mathbb{R}} \sigma = n - \dim_{\mathbb{C}} \rho(\sigma)$;

2) если $m \in \sigma$ – целая точка, лежащая внутри σ (в топологии минимального аффинного пространства, содержащего σ), то $\lim_{t\to 0} t^m \in \rho(\sigma)$.

Сопоставление $M \to F_M$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между торическими компактификациями и полными веерами.

Одномерным конусам в F_M при отображении ρ соответствуют $(n-1)$-мерные орбиты в M. Одномерный конус порожден примитивным целочисленным вектором m. Поэтому корректно определен *примитивный целочисленный вектор* $m(O)$ в пространстве однопараметрических групп, *соответствующий* $(n-1)$*-мерной орбите* O. Порядок характера z^k на $(n-1)$-мерной орбите O равен $\langle k, m(O)\rangle$.

Носитель $\operatorname{supp}(P)$ полинома Лорана P лежит в решетке характеров, его многогранник Ньютона $\Delta(P)$ лежит в пространстве характеров. На двойственном пространстве однопараметрических групп определена функция H_P, сопоставляющая ковектору m число $\min_{k\in\operatorname{supp}(P)}\langle m, k\rangle$. Функция H_P совпадает с *опорной функцией* многогранника $\Delta = \Delta(P)$, определенной равенством $H_\Delta(m) = \min_{k\in\Delta}\langle m, k\rangle$. Порядок $\operatorname{ord} P|_O$ полинома Лорана P на $(n-1)$-орбите O равен числу $H_P(m(O))$ и зависит лишь от многогранника $\Delta = \Delta(P)$. Обозначим через $\overline{O}$ дивизор, являющийся замыканием орбиты O размерности $(n-1)$.

Сопоставим полиному Лорана P дивизор P^∞ на многообразии M, определенный формулой $P^\infty = \sum \operatorname{ord} P|_O \overline{O}$, в которой суммирование ведется по всем

$(n-1)$-мерным орбитам O. Дивизор P^∞, инвариантный относительно действия тора на многообразии M, зависит лишь от многогранника $\Delta = \Delta(P)$. Ниже мы будем обозначать этот дивизор символом Δ^∞.

Замечание. Уравнения $P = 0$ и $z^q P = 0$ в торе $(\mathbb{C}^*)^n$ эквивалентны. Если $-q \in \Delta(P)$, то $0 \in \Delta(z^q P)$. Поэтому для наших целей достаточно ограничиться многогранниками Δ, содержащими точку нуль. Для таких многогранников опорная функция $\Delta(z^q P)$ меньше или равна нулю и дивизор $\Delta^\infty \leqslant 0$ (см. сноску 4).

Определение. Полный веер F *достаточно полон* для многогранника Δ, если его опорная функция H_Δ линейна на каждом конусе $\sigma_i \in F$.

С многогранником Δ связано следующее разбиение двойственного пространства на классы эквивалентности: два ковектора *эквивалентны*, если ограничения линейных функций, соответствующих этим ковекторам, достигают минимума на одной и той же грани многогранника Δ. С целочисленным многогранником Δ связан веер $\Delta^\perp$, конусы в котором – замыкания описанных классов эквивалентности. Веер F достаточно полон для многогранника Δ, если и только если он является подразбиением веера $\Delta^\perp$.

Так как дивизор Δ^∞ инвариантен относительно действия тора, теория торических многообразий позволяет вычислить размерности группы когомологии $H^*(M, \Delta^\infty)$ (см., например, [7]). Ответ оказывается особенно простым, если веер F_M достаточно полон для многогранника Δ.

Напомним, что *число $B^+(\Delta)$ – это число целых точек, лежащих строго внутри многогранника Δ в топологии минимального аффинного пространства $L(\Delta)$, содержащего Δ*. Справедлива следующая теорема (см. теорему из § 4 в [1] и сноску 4).

Теорема 24. *Пусть F_M достаточно полон для Δ. Тогда $H^i(M, \Delta^\infty) = 0$ при $i \neq d$, где $d = \dim \Delta$, $\dim H^d(M, \Delta^\infty) = B^+(\Delta)$.*

Если веер F_M достаточно полон для $T = \Delta_1 + \dots + \Delta_k$, то он достаточно полон для любого многогранника $n_1\Delta_1 + \dots + n_k\Delta_k$ при $n_i \geqslant 0$.

Следствие 25. *Если веер F_M достаточно полон для T, то для любого многогранника $\Delta = n_1\Delta_1 + \dots + n_k\Delta_k$ при $n_i \geqslant 0$ размерности групп когомологий $H^*(M, \Delta^\infty)$ вычислены в теореме 24.*

Следствие 26. *Пусть F_M достаточно полон для Δ. Тогда эйлерова характеристика многообразия M с коэффициентами в пучке $\Omega(M, \Delta^\infty)$ равна $B(\Delta)$, где по определению $B(\Delta) = (-1)^{\dim \Delta} B^+(\Delta)$.*

Следствие 27. *Для всякого гладкого проективного торического многообразия M число $h^0(M) = 1$, а числа $h^i(M)$ при $i > 0$ равны нулю.*

Доказательство. Числа h^i являются бирациональными инвариантами. Все n-мерные торические многообразия бирационально эквивалентны $\mathbb{C}P^n$, для которого следствие очевидно. Приведем прямой вывод следствия из теоремы 24. Пусть $\Delta = \{0\}$ многогранник, состоящий из точки 0. Тогда $\dim \Delta = 0$

и $B^+(\Delta) = 1$. Любой полный веер F_M торического многообразия M достаточно полон для $\Delta = \{0\}$, при этом дивизор Δ^∞ на M равен нулю. Осталось воспользоваться теоремой 24 для $\Delta = \{0\}$.

Как известно (см., например, [7]), торическая компактификация M является гладким проективным многообразием, если и только если его веер F_M обладает следующими свойствами:

1) каждый конус $\sigma \in F_M$ является симплициальным конусом;

2) для каждого $\sigma \in F_M$ примитивные целочисленные векторы, лежащие на ребрах конуса σ, порождают решетку $\mathbb{Z}^n \cap L(\sigma)$, где $L(\sigma)$ – минимальное линейное пространство, содержащее σ;

3) веер F_M двойственен некоторому целочисленному многограннику Δ (т. е. $F_M = \Delta^\perp$).

Известно, что любой полный веер F можно (бесконечным числом разных способов) подразбить так, чтобы он стал веером гладкого проективного многообразия (см., например, [7]).

§ 8. Доказательство теоремы о неприводимости

Здесь результаты § 6 и § 7 используются для доказательства теоремы о неприводимости и приводятся некоторые вычисления, связанные с числами $h^p(X)$ алгебраического многообразия X, определенного системой (1).

Пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ – многогранники Ньютона полиномов Лорана $P_1, \dots, P_k$, фигурирующих в системе (1). Мы будем предполагать, что набор многогранников независим (в противном случае общая система уравнений (1) несовместна). В этом параграфе символом M мы будем обозначать любую (фиксированную) гладкую проективную торическую компактификацию M пространства $(\mathbb{C}^*)^n$, веер F_M которой является подразбиением веера $\Delta^\perp$, где $\Delta = \Delta_1 + \dots + \Delta_k$. Символом M^∞ мы будем обозначать объединение замыканий всех $(n-1)$-мерных орбит в M. Так как M – гладкое торическое многообразие, то M^∞ является дивизором с нормальными пересечениями (см., например, [7]). Открытое многообразие $M \setminus M^\infty$ является тором $(\mathbb{C}^*)^n$, а кольцо R мероморфных функций на M, ограничение которых на тор регулярно, совпадает с кольцом полиномов Лорана. Мы будем пользоваться обозначениями § 6, имея в виду M, M^∞ и R, введенные выше. Чтобы воспользоваться результатами § 6 и § 7 для многообразия X, определенного достаточно общей системой (1), нужна следующая лемма.

Лемма 28. *Замыкание D_i^0 в M каждой из гиперповерхностей $P_i = 0$, где P_i – полином Лорана, фигурирующий в достаточно общей системе* (1), *является гладкой гиперповерхностью в M. Более того, в совокупности все дивизоры D_i^0 и замыкания всех $(n-1)$-мерных орбит взаимно трансверсальны в M.*

Доказательство. Для каждого непустого подмножества $J = \{i_1, \dots, i_l\}$ множества $\{1, \dots, k\}$ рассмотрим соответствующую ему подсистему (5) системы (1). Следующие условия на набор полиномов $P_1, \dots, P_k$ достаточны (и необходимы) для выполнения леммы 28: нужно, чтобы для каждого J подсистема (5) была Δ-*невырождена* (см. [2]) для своего набора многогранников Ньютона $\Delta_{i_1},\dots,\Delta_{i_l}$. Это утверждение автоматически вытекает из теоремы § 2 статьи [2].

Пусть система (1) совместна и является достаточно общей для выполнения леммы 28. Тогда замыкание в M многообразия X решений системы (1) является пересечением гладких дивизоров $D_1^0,\dots,D_k^0$, для которых соответствующие дивизоры $D_1^\infty,\dots,D_k^\infty$ равны $\Delta_1^\infty,\dots,\Delta_k^\infty$, и к нему применимы результаты § 6. Для их применения нужна информация о размерностях групп когомологий $H^*(M, n_1\Delta_1^\infty+\dots+n_k\Delta_k^\infty)$, $n_i=\{0,1\}$, которая приведена в следствии 25 к теореме 24.

Теорема 29. *Для X, заданного системой* (1), *арифметический род $\chi(X)$ равен*

$$\chi(X)=1-\sum_i B(\Delta_i)+\sum_{i<j} B(\Delta_i+\Delta_j)-\sum_{i<j<l} B(\Delta_i+\Delta_j+\Delta_l)+\cdots. \tag{16}$$

Доказательство. Теорема автоматически вытекает из теоремы 21 и следствия 26.

При $k=n$ правая часть формулы (16) равна $n!\,V(\Delta_1,\dots,\Delta_n)$ (см. [1]). Это доказывает теорему Бернштейна–Кушниренко (если $\dim X=0$, то $\chi(X)$ – число точек в X).

Замечание. Формула для $\chi(X)$ и вывод из нее теоремы Бернштейна–Кушниренко были найдены в [1].

Теорема 30. *Для любого неотрицательного числа i выполнено неравенство*:

$$h^i(X)\leqslant \sum_{\{J\mid \dim\Delta_J-|J|=i\}} B^+(\Delta_J)+\delta_0^i,$$

где $\delta_0^i=0$ при $i\neq 0$ и $\delta_0^0=1$, а суммирование ведется по всем $J\neq\varnothing$.

Доказательство. Теорема автоматически вытекает из теорем 22, 24 и равенства $h^i(M)=\delta_0^i$ (см. следствие 27).

Определение. Будем говорить, что число $i\geqslant 0$ *критическое* для набора независимых целочисленных многогранников $\Delta_1,\dots,\Delta_k$ в $\mathbb{R}^n$, если есть непустое подмножество $J\subset\{1,\dots,k\}$ такое, что $B^+(\Delta_J)>0$ и $\dim\Delta_J-|J|=i$.

Пусть X задано достаточно общей системой (1) с независимыми многогранниками Ньютона $\Delta_1,\dots,\Delta_k$.

Теорема 31. *Пусть число i некритическое для $\Delta_1,\dots,\Delta_k$. Тогда если $i=0$, то X – неприводимо, если же $i>0$, то $h^i(X)=0$.*

Доказательство. Для некритического числа i неравенство из теоремы 30 принимает вид $h^i(X)\leqslant\delta_0^i$. Но число $h^0(X)$, равное числу компонент многообразия X, строго положительно, а числа $h^i(X)$ неотрицательны. Теорема доказана.

Теорема 17 о неприводимости следует из теоремы 31. Из теоремы 30 вытекает следующее уточнение результата статьи [1].

Следствие 32. *Если числа* $0 \leqslant i < n-k$ *некритические для* $\Delta_1, \dots, \Delta_k$, *то* $h^0(X) = 1$, $h^{(n-k)}(X) = (-1)^{(n-k)}(\chi(X) - 1)$ *и* $h^p(X) = 0$ *при* $p \neq 0$, $p \neq n-k$.

Доказательство. Действительно, по теореме 30 имеем: $h^0(X) = 1$, $h^p = 0$ при $0 < p < n-k$. Размерность многообразия X равна $n-k$, поэтому $h^p = 0$ при $n-k < p$.

Список литературы

1. А. Г. Хованский, “Многогранники Ньютона и род полных пересечений”, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:1 (1978), 51–61; англ. пер.: A. G. Khovanskii, “Newton polyhedra and the genus of complete intersections”, *Funct. Anal. Appl.*, **12**:1 (1978), 38–46.
2. А. Г. Хованский, “Многогранники Ньютона и торические многообразия”, *Функц. анализ и его прил.*, **11**:4 (1977), 56–64; англ. пер.: A. G. Khovanskii, “Newton polyhedra and toroidal varieties”, *Funct. Anal. Appl.*, **11**:4 (1977), 289–296.
3. В. И. Данилов, А. Г. Хованский, “Многогранники Ньютона и алгоритм вычисления чисел Ходжа–Делиня”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:5 (1986), 925–945; англ. пер.: V. I. Danilov, A. G. Khovanskii, “Newton polyhedra and an algorithm for computing Hodge–Deligne numbers”, *Math. USSR-Izv.*, **29**:2 (1987), 279–298.
4. A. Esterov, K. Takeuchi, “Motivic Milnor fibers over complete intersection varieties and their virtual Betti numbers”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2012**:15 (2012), 3567–3613; 2010, arXiv: 1009.0230v4.
5. A. Esterov, G. Gusev, “Systems of equations with a single solution”, *J. Symbolic Comput.*, **68**, part 2 (2015), 116–130; 2014, arXiv: 1211.6763v2.
6. Ф. Хирцебрух, *Топологические методы в алгебраической геометрии*, Мир, М., 1973, 280 с.; пер. с нем.: F. Hirzebruch, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, 2. erg. Aufl., Ergeb. Math. Grenzgeb. (N. F.), **9**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1962, vii+181 pp.
7. G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal embeddings*, Lecture Notes in Math., **339**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1973, viii+209 pp.

Аскольд Георгиевич Хованский
(Askold G. Khovanskiĭ)
Независимый Московский университет;
Department of Mathematics, University of Toronto, Canada
E-mail: askold@math.toronto.edu

Поступило в редакцию
09.10.2014
25.02.2015